

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס סטטיסטיקה והסתברות. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בְּשִׁבִּילְךָ!

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

© כתב ופתר - ברק קנדל

תוכן

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות	3
פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים	8
פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה	19
פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה	23
פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים	27
פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה	30
פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה	33
פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה	37
פרק 9 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות	42
פרק 10 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד	51
פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד	54
פרק 12 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה	58
פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות	64
פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות	68
פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות	72
פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן	76
פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית	80
פרק 18 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים	84
פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית	87
פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית	92
פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה	96
פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית	99
פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית	103
פרק 24 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות	106
פרק 25 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)	114
פרק 26 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית	124
פרק 27 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית	133
פרק 28 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה	137
פרק 29 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף	140
פרק 30 - מערכות השמליות	143
פרק 31 - אי שוויונים הסתברותיים	149
פרק 32 - התפלגות הדגימה	152
פרק 33 - קונבולוציה	161
פרק 34 - התפלגות לוג נורמלית	166

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע :

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.

למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים .

מרחב מדגם : כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה : $\{1,2,3,4,5,6\}$.

מזג האוויר בעוד שבועיים : $\{ \text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביד} \}$

מאורע : תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות : A, B, C, \dots

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

גודל מרחב המדגם : מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה : $|\Omega| = 6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה : $|A| = 2$ $|B| = 3$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות

במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה : $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

מרחב מדגם אחיד (סימטרי) : מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה

עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד :

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה : $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5 ? $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית ? $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

הסתברות במרחב לא אחיד :

יחושב לפי השכיחות היחסית : $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8 ? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

הסתברות למאורע משלים :

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכב את כל המילים האפשריות.
 - רשום את המקרים למאורע:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה האותיות שונות.
ג. רשום את המקרים למאורע \bar{A} .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
 - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
A - סכום התוצאות 7.
C - מכפלת התוצאות 12.
ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 - מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 - מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרונות:**שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$

שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

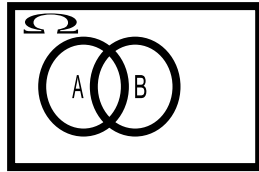
רקע:

פעולת חיתוך:

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך:

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5: $A = \{5, 6\}$

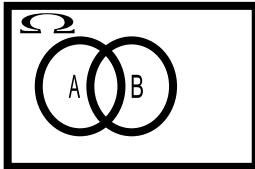
לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד:

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא: $A \cup B$ נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5: $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

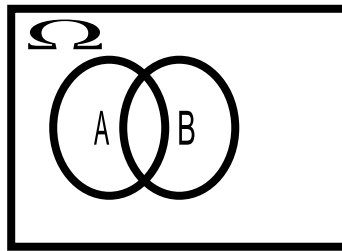
א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?

ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?

ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

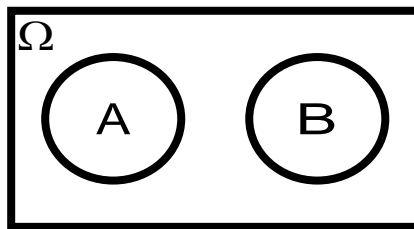
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף : לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

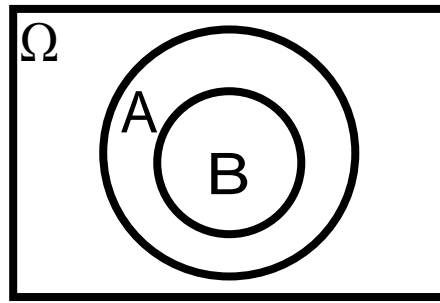
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad : \text{לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad : \text{לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:

-E במילה נמצאת האות E.

-F במילה אותיות שונות.

א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.

ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:

-A לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.

-B לעבור את המבחן בכלכלה.

העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים:

א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.

ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.

ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.

ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.

ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.

ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.

א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:

$$A =$$

$$B =$$

$$\bar{B} =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :

A = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\bar{A} \cap B$

ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה. \bar{A}

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטיילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B- סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C- מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B- קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש $P(A) = 0.3$ ו- $P(B) = 0.2$

א. האם יתכן ש- $p(A \cup B) = 0.4$?

ב. האם יתכן ש- $p(A \cup B) = 0.6$?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $p(A \cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $p(A \cup B)$?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.
- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
- הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיסי האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20. הוכח: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

21. A ו-B מאורעות במרחב המדגם האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד

הוא: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

פתרונות:**שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

שאלה 8

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

שאלה 9

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

שאלה 10

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

שאלה 11

א. כן

ב. 0.3

שאלה 12

התשובה הנכונה ג

שאלה 13

א. 0.05

ב. 0.95

שאלה 14

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

שאלה 18

א. 0.19

ב. 0.05

ג. 0.31

ד. 0.46

ה. 0.12

ו. 0.41

ז. 0.59

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודלו של מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים : n_1 אפשרויות לשלב הראשון , n_2 אפשרויות לשלב השני ... n_k

אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה : $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלי והיתר

ספרות? (הסבר בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
 - א. הטלת קובייה פעמים.
 - ב. מספר תלת ספרתי.
 - ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטרקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
 - א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
 1. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 2. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3. בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. המספר הוא זוגי.
 - ב. במספר כל הספרות שונות.
 - ג. במספר כל הספרות זהות.
 - ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באותה צורה).

4. חמישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבנין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. כולם ירדו בקומה החמישית?
 - ב. כולם ירדו באותה קומה?
 - ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
 - ד. ערך ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות?

5. במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
6. מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות של התוצאות תהינה שונות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
7. יש ליצור מילה בת חמש אותיות לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות) בת 5 אותיות.
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו L?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
8. יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a)
- א. בקוד אין את הספרה 5.
 - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
9. במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימון V או בסימון X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

פתרונות :שאלה 2

- א. 36
 ב. $\frac{1}{36}$
 ג. $\frac{1}{9}$

שאלה 1

- א. 36
 ב. 900
 ג. 70
 ד. 90

שאלה 4

- א. 0.00003
 ב. 0.00024
 ג. 0.20508
 ד. 0.01047

שאלה 3

- א. 0.5
 ב. 0.3024
 ג. 0.0001
 ד. 0.9999
 ה. 0.6976
 ו. 0.01

שאלה 6

- א. $\frac{1}{216}$
 ב. $\frac{5}{18}$
 ג. $\frac{13}{18}$
 ד. $\frac{215}{216}$

שאלה 5

- א. 3,375
 ב. 2,730

שאלה 9

א. 2^n

שאלה 7

- א. 0.5417
 ב. $\frac{1}{26^4}$
 ג. 0.0015

פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1 \text{ : הערה}$$

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d ? (הפתרון בהקלטה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d , כך שהאותיות a, b יהיו ברצף?
(הפתרון בהקלטה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d , כך שהאותיות a, b יופיעו בתור
הרצף ba ? (הפתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו בכמה אופנים :
 - א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
 - ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2. סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
 - א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
 - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3. בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה . נניח שאין תלמידים להם אותו ציון.
 - א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
 - ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים , אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4. מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
 - א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטיסטיקה.

 - ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ד. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5. אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
 - א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
 - ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
 - ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6. 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת קולנוע בכיסאות 1-8.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

פתרונות :**שאלה 1**

א. 24

ב. 120

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.8

ג. 0.022

שאלה 3

א. 362,880

ב. 2,880

שאלה 4

א. 3,628,800

ב. 0.2

ג. 0.8

ד. $\frac{1}{45}$ **שאלה 5**א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$ **שאלה 6**

א. 0.75

ב. 0.014

ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

רקע:

תמורה עם חזרות :

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2, ..., n_r זהים

מסוג r :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

למשל,

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W W T T K K ? (תשובה בהקלטה)

תרגילים:

1. במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות :

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות ב ע ב ע ב ע ג?

3. בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4. רוצים ליצור מספר מכל הספרות הבאות : 1,2,2,2,6 : כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5. במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6. כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ 10 דגלים שונים ניתן ליצור אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

פתרונות:

.3 90

.4 20

.5 $\frac{1}{210}$

.6 12,600

פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

רקע:

מדגם סדור בדגימה עם החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

למשל,
בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?

$$n = 10$$

$$k = 3$$

$$10^3 = 1,000$$

מדגם סדור ללא החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

למשל,
שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים. תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

תרגילים:

1. במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
 - א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
 - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2. במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
 - א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
 - ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
 - ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3. קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4. שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
 - א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
 - ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
 - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

פתרונות :**שאלה 1 :**

א. 8000

ב. 6840

שאלה 2 :

א. 0.0001

ב. 0.6561

ג. 0.3439

שאלה 3 :

0.476

שאלה 4 :

א. 0.04

ב. 0.48

פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad .1$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad .2$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad .3$$

תרגילים :

1. בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות אם-
 - א. אין שום הגבלה לבחירה.
 - ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2. סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה:
 - 5 במקצועות מדעי הרוח.
 - 3 במקצועות מדעי החברה.
 - 2 מתחום המתמטיקה.
 - א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
 - א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4. במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
 - א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5. בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים : 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו- 13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם ; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

- א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
- ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
- ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
- ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6. במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות :

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
- ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
- ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7. הוכח כי:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

8. $2n$ בנים ו- $2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
- ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

פתרונות:**שאלה 2**

א. 252

ב. 100

ג. 100

ד. 60

שאלה 1

א. 53,130

ב. 20,475

ג. 3003

שאלה 4

א. 0.02

ב. 0.187

ג. 0.972

ד. 0.00246

שאלה 3

א. 0.1117

ב. 0.1445

ג. 0.9819

שאלה 8

א. $\binom{2n}{n}^2$

ב. $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

שאלה 6

א. $6.45 \cdot 10^{-5}$

ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$

ג. 0.3225

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה

רקע:

מספר האפשרויות לבחור k עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך n עצמים שונים ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת :

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

למשל,

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך אוכלוסייה של n עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ללא התחשבות בסדר הבחירה
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
ללא החזרה	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

תרגילים:

1. בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?

2. בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?

3. בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר –
 א. הכדורים זהים.
 ב. הכדורים שונים זה מזה.

4. בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:
 א. המשחקים שונים זה מזה.
 ב. במשחקים זהים זה לזה.

5. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 = 3$

6. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$$

7. במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?

8. נתונות האותיות A, B, C ו-D רוצים לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?

9. במשחק הלוטו החדש יש לבחור 4 מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:

א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.

ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

10. ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר :

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

11. ישנם k כדורים להכניס ל- n תאים ($n > k$) . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר :

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

פתרונות:**שאלה 1**

495

שאלה 2

21

שאלה 3

א. 45

ב. 6561

שאלה 4א. 4^{10}

ב. 286

שאלה 5

4

שאלה 6

1771

שאלה 7

15

שאלה 8

10

שאלה 9א. $1/4,845$ ב. $1/8,855$ **שאלה 10**

א. 7776

ב. 252

ג. 720

ד. 6

שאלה 11

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \cdot n^k \quad \text{א. ב.}$$

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{ג.}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ד.}$$

פרק 9 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

2. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- ג. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ד. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ה. אין תפקידים שונים בוועד.
3. במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ב. כמו בסעיף א. רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
3. מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
 - ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
 - ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
 - ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
4. בארונית 4 מגירות. ילד התבקש ע"י אימו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל המשחקים יחד.
- א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
 - ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
 - ג. מה ההסתברות שה"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
 - ד. מה ההסתברות שה"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5. בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
 - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
 - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
 - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
6. 5 חברים נפגשו הם רצו לראות סרט. באפשרותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
 - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
 - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
 - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
 - מה ההסתברות שיוסי וערן יבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
 - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא יבחר על ידי אף אחד מהחברים?
 - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
7. בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים, השנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
 - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
 - בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8. 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות.

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:

א. ללא הגבלה.

ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.

ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9. בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. בוחרים באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10. 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות. כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

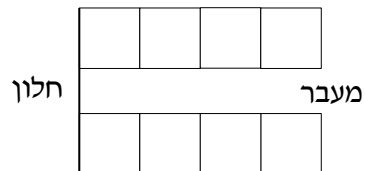
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?

ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?

ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?

ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11. ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו-4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה. 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?

ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?

ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).

ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?

ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?

ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12. סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

- א. כמה סיסמאות שונות יש?
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?
13. מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n .
- א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
 ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
 ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
14. שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים.
 בטא באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".
15. יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות:
 (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- ד. בקוד אין את הספרה 5.
 ה. בקוד מופיעה הספרה 3.
 ו. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
16. מטילים זוג קוביות מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?
17. בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- א. מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
 ב. מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?

18. במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור . 3 תיקיות הן אדומות ו- 2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות. (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).

א. מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?

ב. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?

ג. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?

ד. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?

19. לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל- 3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.

א. מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?

ב. מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?

ג. מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?

20. מסדרים n כדורים שונים ב n תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד) . מה הסיכוי

שבתא i ($1 \leq i \leq n$) יהיו בדיוק k כדורים ?

21. בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות .

א. כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?

ב. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?

ג. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

22. מטילים קובייה הוגנת K פעמים .

א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא j ?

ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא i ?

ג. עבור $i \leq j$, מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא j וגם התוצאה הכי קטנה היא i ?

פתרונות:**שאלה 1**

ד. 102,400,000

ה. 78,960,960

ו. 658,0088

שאלה 2

ג. 810,000

ד. 657,720

ה. 27,405

שאלה 3

ד. 14,040,000

ה. 1,404,000

ו. 5,616,000

ז. 8,424,000

שאלה 4

א. 0.00024

ב. 0.00098

ג. 0.05933

ד. 0.75000

שאלה 5

ד. 0.00098

ה. 0.17798

ו. 0.02929

ז. 0.02197

שאלה 6

א. $\frac{1}{4096}$

ב. $\frac{1}{32,768}$

ג. 0.205

ד. 0.795

ה. 0.0105

ו. 0.5129

ז. 0.1071

שאלה 7

א. 4200

ב. 50,400

ג. 604,800

שאלה 8

א. 604,800

ב. 2,880

ג. 2,880

שאלה 9

0.238

שאלה 10

א. 0.1512

ב. 0.014

ג. 0.059

ד. $\frac{62}{10^6}$

שאלה 11

א. 40,320

ב. 0.1071

ג. 0.2142

ד. 0.0357

ה. 0.5714

ו. 0.1429

ז. 0.0143

ח. 0.0095

שאלה 14

$$\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

שאלה 16

לפחות 25

שאלה 17

א. 0.35721

ב. 0.1759

שאלה 18

א. 0.75

ב. 0.075

ג. 0.375

ד. 0.15

שאלה 19

א. 0

ב. $\frac{450}{729}$ ג. $\frac{90}{729}$

שאלה 20

$$\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$$

שאלה 21

א. 720

ב. 360

ג. 432

שאלה 22

$$\frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \quad \text{א.}$$

$$\frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k} \quad \text{ג.}$$

פרק 10 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש-B כבר קרה:

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

למשל, (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה.

נגדיר:

A – התוצאה זוגית.

B – התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את:

$$P(A|B)$$

תרגילים:

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
3. מטילים צמד קוביות.
נגדיר:
 A – סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7
 B – מכפלת התוצאות 12
חשבו את $P(A|B)$.
4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל שהתוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת 4. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

השאלות הבאות משלבות קומבינטוריקה:

9. בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו ארבעה ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ושתי בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?
10. חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה ליד זה באקראי בכיסאות מספר 5 עד 9.
אם ידוע שערך ודין התיישבו זה ליד זה. מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו 7?

פתרונות:**שאלה 1**

0.2

שאלה 2

1/3

שאלה 3

0.5

שאלה 4

0

שאלה 5

1/6

שאלה 6

2/11

שאלה 7

1/3

שאלה 8

3/4

שאלה 9

2/3

שאלה 10

1/4

פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
 אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :
 נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
 - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
 ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
 - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
 - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
 - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
 - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
 - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
 - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
 - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
 - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
- הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בכל שלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

פתרונות:**שאלה 1**

- א. 0.833
ב. 0.9375
ג. 0.0625
ד. 0.5
ה. 0.789

שאלה 2

- א. 5%
ב. 0.0833
ג. 0.786
ד. 0.6875

שאלה 3

- א. 0.4
ב. $\frac{2}{3}$
ג. 0.25
ד. $\frac{6}{7}$

פרק 12 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

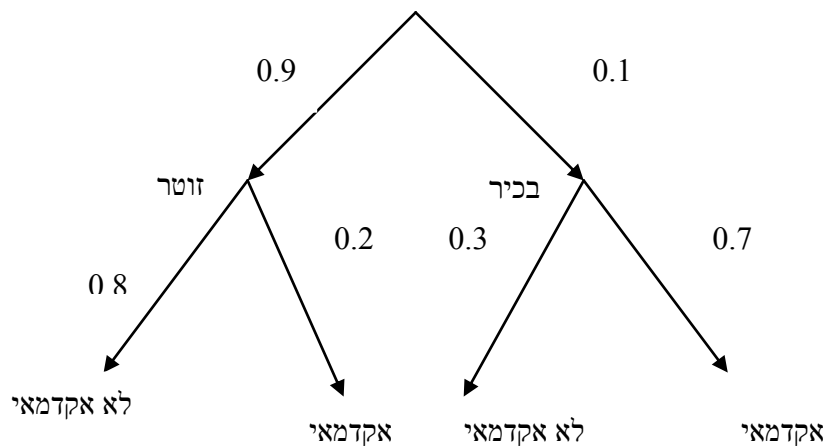
רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו, A_1, \dots, A_n חלוקה ממצה של Ω .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i) \quad \text{אזי:}$$

נוסחת בייס

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j)P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?

2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי:
 - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש-68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא

נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא p , אם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10. אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:

א. דולב, רונית, דולב

ב. רונית, דולב, רונית

בכל משחק מישהו חייב לנצח (אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

פתרונות:**שאלה 1**א. $2/7$ ב. $23/49$ **שאלה 2**

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

שאלה 9

$$\frac{kp}{1 + (k-1)p}$$

שאלה 10

אפשרות א עדיפה

פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18 \quad \text{באופן דומה:}$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש: $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$. האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

אז:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ אזי המאורעות בלתי תלויים.
 ב. מאורע A כלול במאורע B. $P(A) > 0$, $0 < p(B) < 1$, לכן $p(A/B) < p(A)$.
 ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.
 ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו-B מאורעות זרים.
 ה. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו-B מאורעות זרים.

פתרונות :**שאלה 1**

בן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

שאלה 8

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

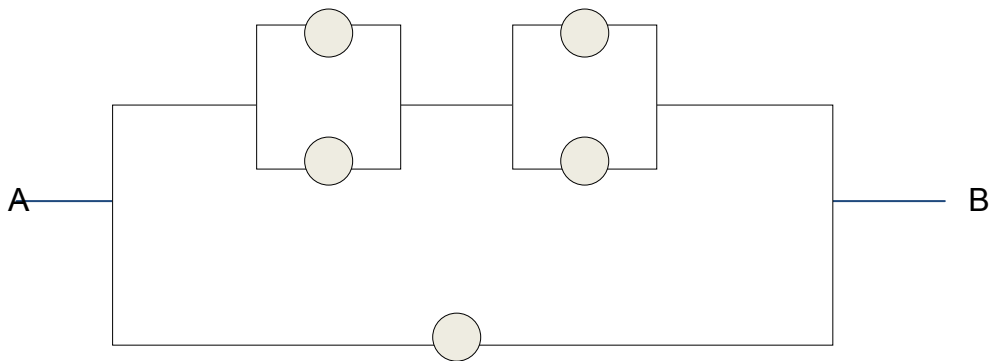
פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
 ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג?
 ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א?
 ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א" בלתי תלויים?
3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
 בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
 בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
 בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
 ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?
 ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?
 ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
 ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסיה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - נבחר אדם מובטל
 B - נבחר גבר
 האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב-B את ההטלה השנייה ראש.
- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
 ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
 ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?
 ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
 ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
 ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
 2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8. נתונה המערכת החשמלית הבאה :



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p .
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
 הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P + (1 - P)(2P - P^2)^2$$

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

שאלה 3

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

שאלה 4

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

שאלה 5

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

שאלה 6

א. 0.65

ב. A ו-B תלויים.

ג. 0.5384

שאלה 7

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים.

ד. 1. 0.478

2. 0.15

פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

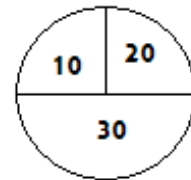
רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד (פתרון בהקלטה).

תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 - 70 משפחות עם מכונית אחת.
 - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 - 20 משפחות עם 3 מכוניות .
- בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.
- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
2. מהאותיות C, B, A יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
 - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
 - ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של X .
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
- כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של A.

7. בגן ילדים 8 ילדים מתוכם 5 בנים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8. בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10

להלן הנתונים :

20% צופים בערוץ 2.

8% צופים בערוץ 1.

10% צופים בערוץ 10.

כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.

10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.

נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו

את פונקציות ההסתברות של X.

פתרונות**שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

שאלה 4

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

שאלה 5

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

שאלה 6

10

פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

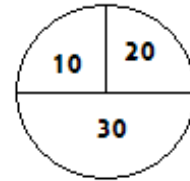
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

שונות – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

סטיית תקן – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

תרגילים:

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$p(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של X .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		P(x)

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5- ו 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10 . מצא את פונקציית ההסתברות.

7. להלן ההתפלגות של משתנה מקרי X .

X	P
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{4}$

מהו הערך K שייתן ערך מינימלי לשונות של X .

פתרונות:**שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

שאלה 3

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

שאלה 4

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

שאלה 5

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

שאלה 6

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

שאלה 7

2.33

פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

שלבי העבודה:

1. נוהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונוהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונוות של הרווח במשחק ?

פתרון (בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

תרגילים:

1. סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $Y = 7 - X$.
חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.
להלן התביעות האפשריות והסתברותן:
בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל.
החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית באלפי ₪
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6. יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	X
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(x)$

- 7.35. כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
- א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
- ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגוייה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

- א. מצא את ערכו של A .
- ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- ג. חשב את $E(X^3)$.
- ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $4 - \frac{X}{2}$

פתרונות :שאלה 1:

תוחלת: 14 שונות: 32

שאלה 2:

תוחלת: 8 שונות: 12

שאלה 3:

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

שאלה 4:

תוחלת: 3

שונות: 3

שאלה 6:ב. $V(X) = 1.8275$ שאלה 7:א. $10 = A$

$$E(X) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$V(X) = 1$$

$$E(X^3) = 35.4 \quad \text{ג.}$$

$$V(X^3) = 616.84$$

$$E(y) = -2.5 \quad \text{ד.}$$

$$V(y) = 0.25$$

פרק 18 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

רקע:

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

תרגילים:

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונויות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונויות 5. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונויות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2. X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

3. אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:

$X =$ סכום הזכייה במשחק הראשון.

$Y =$ סכום הזכייה במשחק השני.

נתון:

$$E(x) = 10 \quad \sigma(X) = 3$$

$$E(y) = 12 \quad \sigma(Y) = 4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ש"ח הוא חצי וב-10 ש"ח רבע כך גם ב- 20 ש"ח. מה היא התוחלת והשונויות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים.

5. נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X = K) = \frac{A}{K-1} \quad K = 2, 3, 4, 5$$

0 אחרת

א. מצא את ערכו של A .

ב. חשב את התוחלת והשונויות של X .

ג. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות n את תוחלת והשונויות של סכום המשתנים.

פתרונות:**שאלה 1**

תוחלת: 9

שונות: 15

שאלה 3

תוחלת: 22

סטיית תקן: 5

שאלה 4

תוחלת: 90

שונות: 275

שאלה 5

$$A = \frac{12}{25} = 0.48 \quad \text{א.}$$

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת $n \cdot 2.92$ שונות $n \cdot 1.1136$

פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad ; \quad 0! = 1 \quad \text{כאשר}$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

(1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.

(2) חוזרים על הניסוי n פעמים.

(3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

תרגילים:

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה.
נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
- מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
- מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
- מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
 - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
8. מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. נגדיר את X – מספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את $E(x^2)$.

פתרונות :**שאלה 7 :**

- א. 0.401
 ב. תוחלת : 8.025
 סטיית תקן : 2.193

שאלה 2 :

- ב. 0.2335
 ג. 0.1493
 ד. תוחלת : 7
 סטיית תקן : 1.449

שאלה 8 :

א. 7.5

שאלה 3 :

- א. 0.5314
 ב. 0.0984
 ג. 0.1143
 ד. תוחלת : -18
 סטיית תקן : 14.697

שאלה 4 :

- א. 0.1789
 ב. 2

שאלה 5 :

- א. 0.1956
 ב. 0.4253

שאלה 6 :

- א. 0.85
 ב. 0.182
 ג. תוחלת : 82 נקודות
 שונות : 91.8 נקודות

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
 X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.
 נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

פונקציית ההסתברות:

$$k = 1, 2, \dots, \infty \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{שונות:}$$

תכונות חשובות :

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו,
 $P(X = n + k) / X > k = P(X = n)$

$$P(X > k) = q^k$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים ש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק.
 ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?
- ד. אם הוצאו יותר מ- 3 כדורים. מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

תרגילים:

1. קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. שידגום 3 מוצרים.
 - ב. שידגום 4 מוצרים.
 - ג. שידגום 5 מוצרים.
 - ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
 - ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
 - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
 - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
 - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

5. אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התונית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגת שוקולד?
- ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגות הגבינה שדגם האדם?

פתרונות :**שאלה 2 :**

- א. 0.009
 ב. 0.0001
 ג. תוחלת : 1.111
 שונות : 0.1234
 ד. תוחלת : 44.4
 שונות : 308.5

שאלה 3 :

- א. 0.999
 ב. 0.875
 ג. 0.03125
 ד. 1

שאלה 4 :

- א. 0.1029
 ב. 9.72

שאלה 5 :

- א. 0.06
 ב. 0.7176
 ג. 0.0729
 ד. 9.487 משחקים

שאלה 6 :

- א. 0.015
 ב. 0.0215
 ג. תוחלת $63\frac{1}{3}$, שונות $2777\frac{7}{9}$
 ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054

פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

התפלגות זו הנה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית ההסתברות:

$$P(X = K) = \frac{1}{b - a + 1}$$

$$K = a, a+1, \dots, b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} \quad \text{שונות:}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

תרגילים :

1. במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45 .
נתבונן במשתנה X המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- א. חשבו את $P(X = 2)$
- ב. חשבו את $P(X \leq 30)$
- ג. חשבו את $P(X > 4 | X \leq 10)$
- ד. חשבו את $P(X = k)$
2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
- ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
1. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
2. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?
3. יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
- א. מהי ההתפלגות של X ?
- ב. מה התוחלת של X ?
- ג. קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?
4. בכד 10 כדורים שרק אחד צבע אדום. אדם מוציא כדור ללא החזרה עד אשר מתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?
5. יש לבחור מספר אקראי בי 1 ל-50 כולל.
- א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
- ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
- ג. אם נבחר מספר גדול מ-20 מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?
6. הוכח שאם $X \sim U(a, b)$ אז מתקיים ש: $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

פתרונות :**שאלה 1 :**

א. תשובה: $\frac{1}{45}$

ב. תשובה: $\frac{30}{45}$

ג. תשובה: 0.6

שאלה 2

א. תוחלת: 50.5

סטיית התקן: 28.87

ב. 1. תשובה: 0.08192

ב. 2 תוחלת: 303 סטיית תקן: 70.71

שאלה 4 :

תוחלת 5.5

שונות: 8.25

פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן. λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim \text{pois}(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

תרגילים:

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
 - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

פתרונות :**שאלה 1:**

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

שאלה 2:

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

שאלה 3:

א. 4

ב. 0.407

שאלה 5:

א. 0.2388

ב. 0.2196

ג. 0.6948

שאלה 6:

א. 16.7

ב. 0.0708

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים, מתוכם D פריטים בעלי תכונה מסוימת- פריטים אלה נקראים "מיוחדים".

בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.

X – מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.

משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N, D, n) יסומן על ידי: $X \sim H(N, D, n)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

התוחלת של ההתפלגות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N}$$

השונות של ההתפלגות:

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

בכתה 40 תלמידים מתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?

ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

תרגילים:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
 - ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 - ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה ולא בטבלה.
 - ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 - ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$

3. זהה בסעיפים הבאים את ההתפלגות וחשב לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
 - נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
 - אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
 - א. האוכלוסייה גדולה מאד.
 - ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.

4. בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו- 5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
 - א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
 - ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

פתרונות:**שאלה 2**

- ב. תוחלת: 1.5
 סטיית תקן: 0.748
 ג. 0.9

שאלה 1

- ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{5}{9}$
 ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{20}{27}$

פרק 24 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תרגילים:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $W = 2X - 4$, חשב את התוחלת וסטיית התקן של W .

ג. $T = X + Y$, חשב את התוחלת של T . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכוונה (במכוונה א' ובמכוונה ב'). הסיכוי

שלו לנצח במשחק במכוונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכוונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ינצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח

בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את

המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת

הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של X ?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית.

חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.

להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:

הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.

הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.

הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.

ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר

הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה

ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8. מבחן בנוי משני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
- ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
- ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
- ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?
9. יהי X משתנה מקרי המקיים $E(X) = 2$ וכן $V(X) = 1$. חשב $E(X - 5)^2$.
10. הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $8/3$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.
- א. חשבו את ערכו של P .
- תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
- ב. מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?
- ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?
- ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?
- ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?
11. רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1-P$ שמאלה ביחידה אחת. נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n .

12. למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P .

ג. לאילו ערכי P המשחק כדאי?

13. מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ. רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14. לפניכם N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N . ברשותכם n חולצות. עליכם באופן אקראי לבחור לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל החולצות שברשותכם. נגדיר את X_1 - מספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1. נגדיר את X_N - מספר החולצות שהונחו במגירה מספר N .

חשבו את $V(X_1 + X_N)$.

15. n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם. מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16. הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א בהכרח ניגש למועד ב ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון. נתון שלמועד א נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס. מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

17. לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה. יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.

$$\text{מצאו את } E\left[\frac{1}{Y+1}\right].$$

18. לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים. נסמן ב- X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים. חשבו את $E(\sqrt{x+7})$.

19. בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתל.
א. מצאו את ההתפלגות של X .

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

פתרונות :**שאלה 1:**

א. תוחלת: 2

ב. סטיית תקן: 1

א. תוחלת: 0

ב. סטיית תקן: 2

א. תוחלת: 4.5

ב. סטיית תקן: לא ניתן

שאלה 2:

א. 0.03

ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875

ג. 0.1328

שאלה 3:

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

א. תוחלת: 3

ב. שונות: 2

א. תוחלת: 1.5

ב. שונות: 0.5

שאלה 4:

א. 0.9975

ב. 0.0172

ג. 1.0025

שאלה 5:

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

שאלה 6:

ב. תוחלת : 1.5

שונות 0.61

ג. תוחלת : 0

סטיית תקן : 4.68

שאלה 7:

א. 0.4348

ב. 0.0923

שאלה 8:

א. 2.013

ב. 0.5256

ג. תוחלת : 8

שונות : 1.6

ד. תוחלת : 10.5

שונות 3.475

שאלה 9:

10

שאלה 10:

א. 0.6

ב. 0.0384

ג. 0.0256

ד. תוחלת : 0.67

שונות : 1.11

ה. 0.24

שאלה 12:

$$\frac{1-2p^2}{p} \quad \text{ב.}$$

$$0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ג.}$$

שאלה 13:

$$P(X = k) = \binom{m+k}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1} \quad k = 0, 1, \dots, \infty$$

שאלה 14:

$$n \cdot \left(\frac{2}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right)$$

שאלה 15:

$$\frac{2^n}{2n}$$

שאלה 16:

3	2	1	x
0.7099	0.2893	0.0008	P(x)

שאלה 17:

$$\frac{e^{-6}}{6} [e^6 - 1]$$

שאלה 18:

2.675

שאלה 19:

$$P(X = k) = \frac{n-k-1}{\binom{n}{2}} \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad \text{א.}$$

ב. הוכחה

פרק 25 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן

פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

פונקציית התפלגות מצטברת:

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

כמו כן:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad p(X > t) = 1 - F(t)$$

תוחלת של משתנה רציף:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$$

שונות של משתנה רציף:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת של פונקציה של X:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

אחוזונים:

האחוזון ה-P הוא ערך (נסמן אותו: x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר:

$$p(X \leq x_p) = p$$

ריענון מתמטי:נוסחאות לחישוב שטחים:

$$S_{\text{triangle}} = \frac{h \cdot a}{2} \quad \text{שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2}$$

$$S_{\text{rectangle}} = a \cdot b \quad \text{שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b)}$$

משוואת קו ישר:

$$y = mx + n$$

$$m = \text{שיפוע}$$

$$n = \text{נקודת החיתוך עם ציר ה-y}$$

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: } (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1, Y_1) ושיפועו ידוע m :

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln k} k^{ax+b} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + c$$

$$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

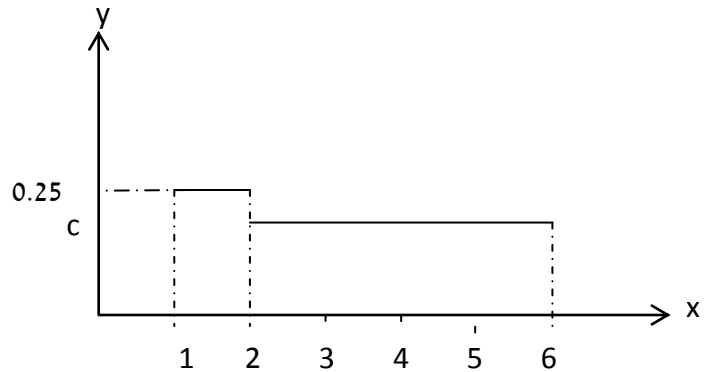
$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

תרגילים:

1. X הינו משתנה רציף עם פונקציה צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של c .

ב. בנה את פונקציה ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. $P(x < 4)$

2. $P(x > 1.5)$

3. $P(1.5 < x < 5)$

4. $P(5 < x < 10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציה הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

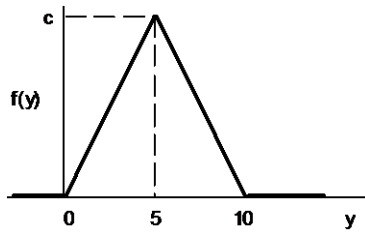
ידוע ש- $P(0 < X < 1) = 1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקציה הצפיפות של X .

ב. מצאו את החציון של X .

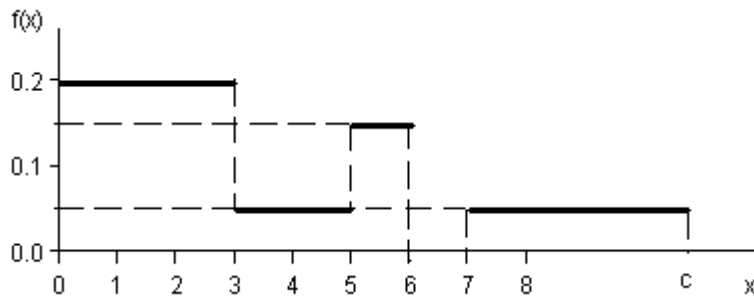
ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5?

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y :



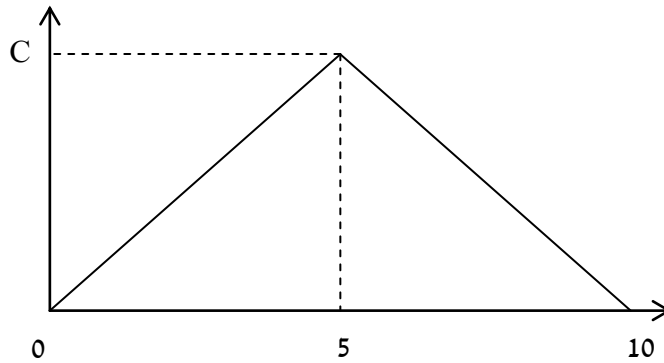
- א. מצאו את c .
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
 ג. חשבו את ההסתברויות: $P(Y > 4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$.
 ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והחציון של Y . הסיקו מהו העשירון עליון $y_{0.9}$.

4. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



- א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ג. חשבו את ההסתברויות הבאות: $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

5. נתונה פונקציה הצפיפות הבאה :



א. מה ערכו של C?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

6. נתונה פונקציה צפיפות $f(X) = \frac{2}{x}$ פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

א. מצא את ערכו של K.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשב את הסיכוי ש X לפחות 1.5.

ד. מצא את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

7. נתונה פונקציה צפיפות הבאה : $f(X) = AX^2(10 - X)$ $0 < X < 10$ A הינו קבוע חיובי.

א. מצא את A.

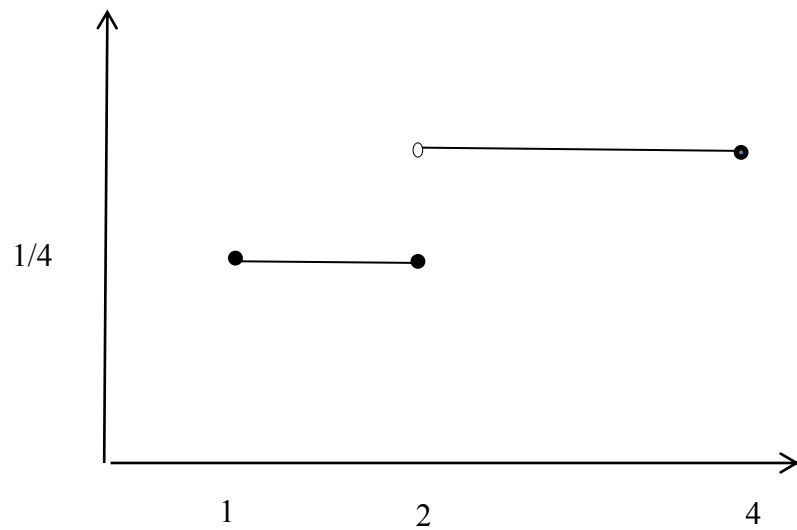
ב. חשב את $P(x > 5 | x > 2)$.

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8. פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X :
 $f(x) = 0.5 \cdot e^{-2x}$
 $-\infty \leq X \leq \ln(c)$

- מצא את ערכו של c .
- מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
- חשב $P(X > 0)$.
- מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :



- רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.
- בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- מצא את החציון של ההתפלגות.
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.
- חשב את $E(X^3)$.

10. במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

- א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?
 ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
 ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ 20 דקות?

11. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה:

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
 ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
 ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b.
 ב. חשבו את התוחלת של X.
 ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y?

13. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של k .
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ג. חשבו $p(x > 2.5)$

14. להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

- א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.
 ג. מצא את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

פתרונות :שאלה 1 :

$$א. \frac{3}{16} \quad ד. \frac{1}{3}$$

שאלה 2 :

$$א. c=0.5 \quad b=2$$

$$ב. 1.41$$

$$ג. 0.0625$$

שאלה 3 :

$$א. 0.2$$

$$ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32$$

ד. העשירון התחתון : 2.24

הרבעון התחתון: 3.54

החציון : 5

העשירון העליון : 7.76

שאלה 4 :

$$א. 10$$

שאלה 5 :

$$א. C=0.2$$

$$ב. 5 \pm 1.46$$

שאלה 6 :

$$א. \frac{1}{e^2}$$

$$ג. 0.189$$

$$ד. 1.051$$

$$ה. 1.297$$

שאלה 7 :

$$א. 0.0012$$

$$ב. 0.7067$$

שאלה 8 :

$$א. 2$$

$$ג. 0.75$$

$$ד. 0.549$$

ג. תוחלת : 6, שונות : 4

שאלה 9 :

ג. $2\frac{2}{3}$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ה. 23.4375

שאלה 10 :

א. $\frac{7}{27}$

ב. 0

ג. 3.704

שאלה 11 :

א. $\frac{2}{3}$

ב. 5.22

ג. $\frac{2}{9}$

שאלה 12 :

ב. 0.0498

ג. 0.6321

ד. 11.51

שאלה 13 :

ב. תוחלת :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות :

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

שאלה 14 :

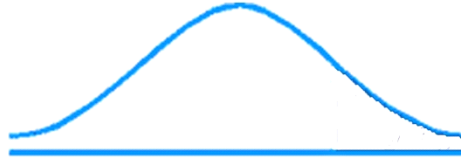
א. $\frac{1}{6}$

ג. 0.229

פרק 26 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z .

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

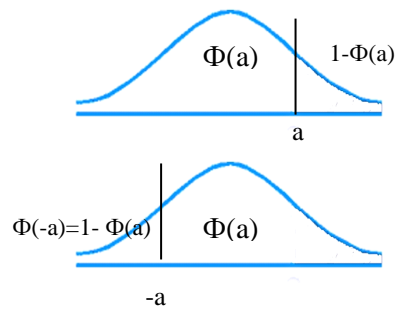
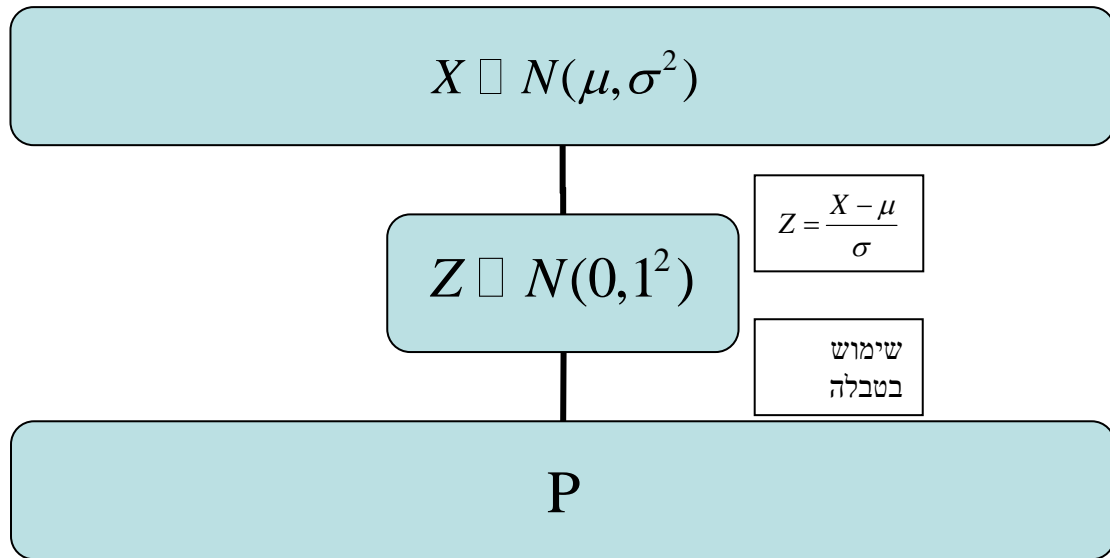
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.

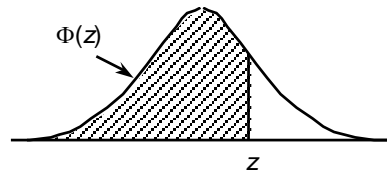
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושוונות של 9 דקות רבועות .

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג .

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל- 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה- 20?
 - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

- א. בעשירון העליון.
 ב. בממוצע.
 ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

- א. 1
 ב. 2
 ג. 3
 ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
 ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
 ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?
 ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 26.43%	א. 89.25%
ב. 89.44%	ב. 2.28%
ג. 39.44%	ג. 0
ד. 0.383	ד. 50%
ה. 100%	

<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 500	א. 119.2
ב. 100	ב. 80.8
ג. 0.3446	ג. 112.6
ד. 733	ד. 87.4
ה. 267	

<u>שאלה 9</u>	<u>שאלה 8</u>
א. 0.1587	א. 3
ב. 0.0228	ב. בממוצע.
ג. 0.8563	ג. 1
ד. 0.3975	

<u>שאלה 11</u>	<u>שאלה 10</u>
א. 0.1359	א. 1925
ב. 0.675	ב. 0.2266
ג. 100	ג. 0.1587
ד. 0.25	

פרק 27 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ כאשר } \lambda > 0$$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד להתרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ לכל } x \geq 0$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון: $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

- אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.
- מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ- 9 שעות?
 - מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?
 - אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

תרגילים:

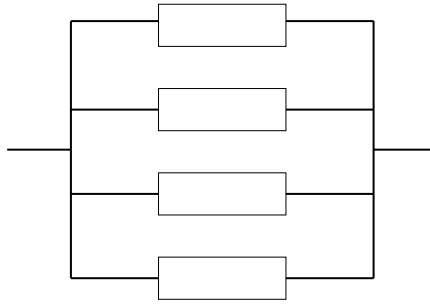
1. הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
 - א. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
 - ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
 - ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
 - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3. משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
 - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
 - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
 - ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
 - ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

4. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
 - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
 - ב. אם שולה המתונה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין. אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם

המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.

מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות:**שאלה 1 :**

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

שאלה 2 :

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

שאלה 3 :

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד. 69.08

שאלה 4 :

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

שאלה 5 :

א. 0.8403

ב. $A0.0588 > K$

פרק 28 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b .

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

התוחלת:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

X -משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

א. מה הסיכוי ש- X קטן מ-25?

ב. מה התוחלת והשונות של X ?

תרגילים:

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג $U(13, 16)$.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?
 - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
 - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
 - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
 - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
 - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
 - א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
 - ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
 - ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

פתרונות:שאלה 2:א. $X \sim U(0,10)$

ב. 0.6

ג. 10

שאלה 1:

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב. $1/3$ ג. $2/3$ שאלה 3:

א. 0.2

ב. $\frac{2}{7}$

ג. 109

פרק 29 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף**רקע:**

מדובר על מצב שידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון משתנה מקרי רציף: X המתפלג אחיד בין 0 ל-1. מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת

של המשתנה Y . כאשר הקשר בין X ל- Y נתון על ידי הנוסחה: $Y = e^x$.

תרגילים:

1. יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1.

$$. Y = e^{-W} \text{ הגדירו משתנה חדש}$$

א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ב. זהה את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.

2. נתון ש- $X \sim U(0,1)$. יוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R = X^2$. מצאו את

פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R .

3. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda)$ כמו כן נתון הקשר הבא: $Y = \ln(X)$. הוכח שפונקציית הצפיפות של

$$Y \text{ נתונה על ידי הנוסחה הבאה: } f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^Y + 1}$$

4. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda = 1)$ כמו כן נתון הקשר הבא: $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$.

א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ב. זהה את ההתפלגות של Y .

5. אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2. מצא את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.

6. נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t) = \theta^t - 1$ עבור התחום $0 \leq t \leq 1$.

א. מצא את ערכו של הפרמטר θ .

ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה X .

ג. יהי $Y = 2^X - 1$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y וזהה את התפלגותו.

פתרונות:שאלה 1:

ב. $Y \sim U(0,1)$

שאלה 2:

$$f(R) = \frac{1}{2\sqrt{R}} \quad \text{כאשר } 0 < R < 1$$

שאלה 4:

$$Y \sim U(-1,1)$$

שאלה 5:

$$f(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{כאשר } 1 < y < 8$$

שאלה 6:

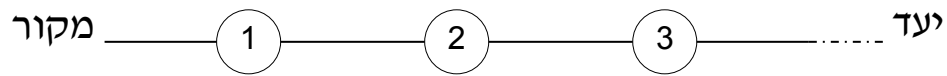
א. 2

ג. $Y \sim U(0,1)$

פרק 30 - מערכות חשמליות

רקע:

מערכת חשמלית בטור הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:

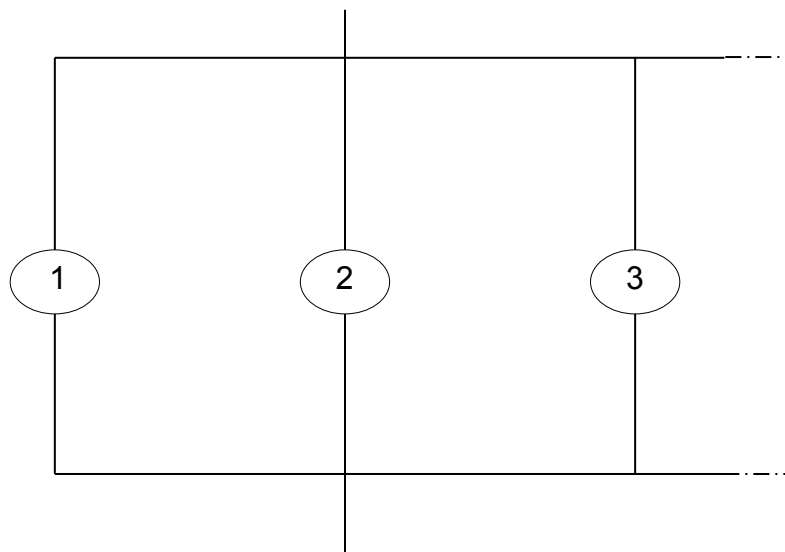


נסמן ב A_i את המאורע: רכיב i פועל.

כדי שהמערכת כולה תפעל צריך להתקיים ש $\bigcap_{i=1}^n A_i$

מערכת חשמלית במקביל הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:

מקור



יעד

כדי שהמערכת החשמלית כולה תפעל צריך להתקיים ש: $\bigcup_{i=1}^n A_i$

דוגמא: הפתרון בהקלטה.

במערכת חשמלית 4 רכיבים בלתי תלויים שלכל אחד מהם סיכוי P לפעול. בטאו באמצעות P את

הסיכוי שהמערכת תפעל.

א. כל הרכיבים מחוברים בטור זה לזה.

ב. כל הרכיבים מחוברים במקביל זה לזה.

תרגילים :

1. נתונים שלושה רכיבים חשמליים המחוברים בטור. אורך החיים של כל מכשיר מתפלג באופן הבא :

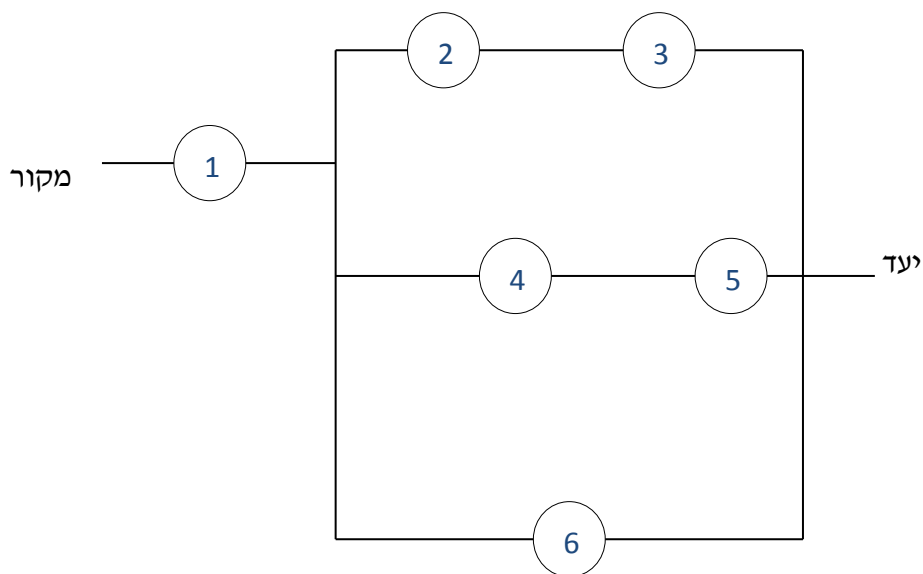
$$X_1 \sim U(2, 4)$$

$$X_2 \sim N(3, 1)$$

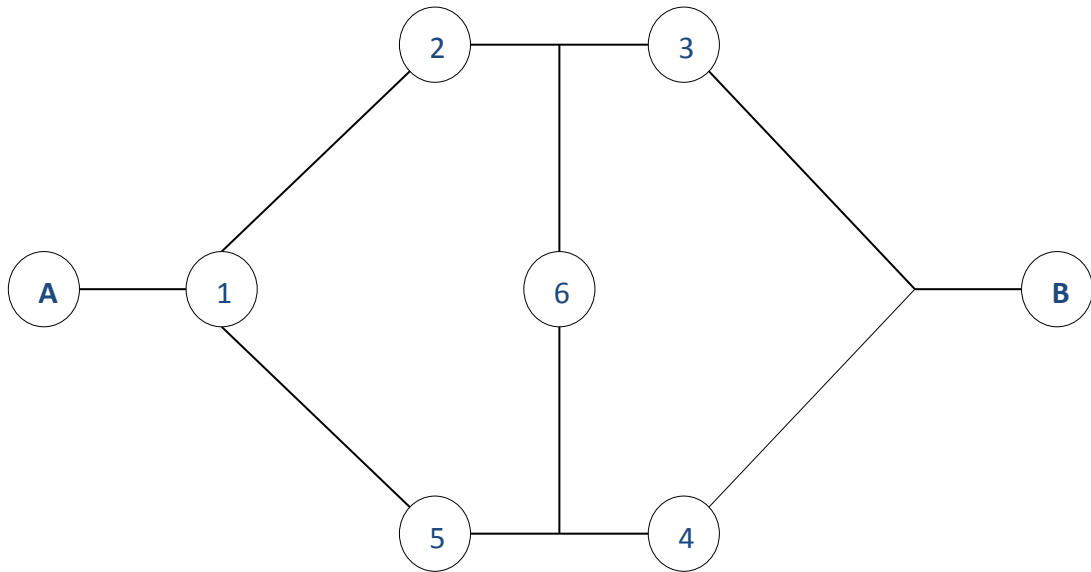
$$X_3 \sim \exp(1)$$

כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. כל הרכיבים הופעלו כעת. מה הסיכוי שבעוד 3 שעות המערכת תפעל?

2. המערכת החשמלית הבאה מכילה 6 רכיבים כמוראה בשרטוט :



כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. רכיבים מספר 1, 2, 6 פועלים בסיכוי 0.9. רכיב מספר 3 פועל בסיכוי 0.8. רכיבים מספר 4, 5 פועלים בסיכוי P. מצא את P אם הסיכוי שהמערכת תפעל הוא 0.887148.

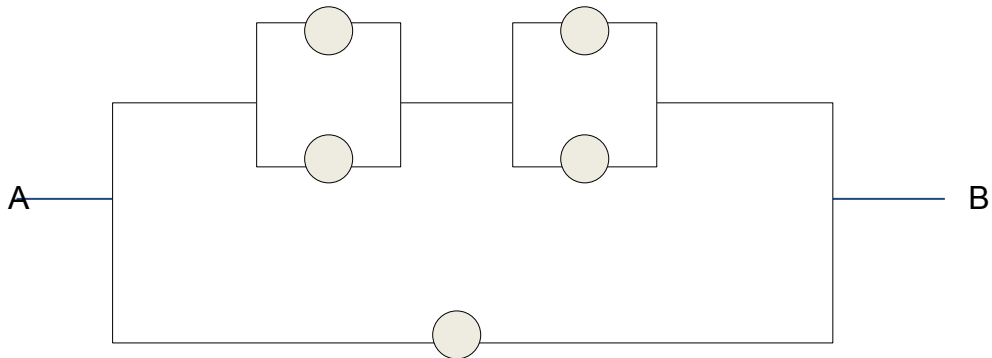


בין שני המחשבים A ו-B נמצאים 6 שרתים כמוראה בשרטוט. כל אחד מהשרתים תקין בסיכוי 0.9. על מנת שהודעה תצליח לעבור ממחשב A ל-B צריך להיות לפחות מסלול אחד שבו כל השרתים תקינים.

א. מה ההסתברות לכך שההודעה תעבור בהצלחה ממחשב A ל-B?

ב. ההודעה לא הצליחה לעבור ממחשב A למחשב B. מה הסיכוי ששרת מספר 1 לא תקין?

3. נתונה המערכת החשמלית הבאה:



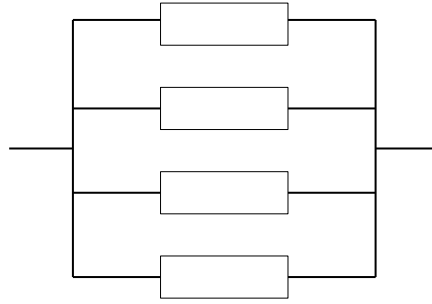
כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p .

כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.

הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P + (1 - P)(2P - P^2)^2$$

4. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



- על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
 אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.
- ג. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?
- ד. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪. מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות :**שאלה 1**

0.1245

שאלה 2

0.7

שאלה 3

א. 0.880632

ב. 0.837745

שאלה 5

א. 0.8403

ב. $0.0588A > K$

פרק 31 - אי שוויונים הסתברותיים

אי שוויון צ'ביצ'ב .א.

1. מצא חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 .
א.

$$p(2 < x < 14)$$

ב.

$$p(|x - 8| \geq 9)$$

2. מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר. יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

3. אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40% . נלקח מדגם מקרי בגודל 200 .
תן חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל- 45% .

4. מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב 20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100 . העזר באי שוויון צ'ביצ'ב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120 .

5. בוחרים מספר n ספרתי באופן מקרי. (הספרה ראשונה יכולה להיות 0)
א. עבור $n = 10$: הערך את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
ב. מה אורך המספר המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של 95% , ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75? לפי אי-שוויון צ'ביצ'ב.

6. בעיר מסוימת ל 5% מהמשפחות אין מכונית , ל-20% יש מכונית אחת , ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות ביישוב הוא גדול מאד. הערך את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27 .

ב. אי שוויון מרקוב

1. אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשב לפי אי שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות .
2. התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות . הערך את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ- 15 משפחות.
3. ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 75.
 - א. מצא חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 85.
 - ב. נניח שהמרצה יודע בנוסף ששונות ציון מבחן הגמר של הסטודנט היא 25, מה אפשר לומר על ההסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה גבוה מ-65 ונמוך מ-85?

תשובות סופיות - אי שוויונים הסתברותייםפרק א' - אי שוויון צ'ביצ'ב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. בין $3/4$ ל- 1	לפחות 30
ב. בין 0 ל- $1/9$	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
0.52	0.75
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. 0.825	0.706
ב. 294	

פרק ב' - אי שוויון מרקוב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
בין 0 ל- $1/3$	לכל היותר 0.625
<u>שאלה 3</u>	
א. 0.8823	
ב. לפחות 0.75	

פרק 32 - התפלגות הדגימה

ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n . תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

ג. משפט הגבול המרכזי

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול ($n \geq 30$)

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של x .

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x .

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

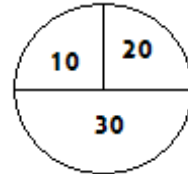
ד. בקבוקי היין שבארגז נמוזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?

12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה

ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה

קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	P(X)

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם \bar{X} :

לכן $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה : (בחר בתשובה הנכונה)

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :
(בחר בתשובה הנכונה)

א. $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב. $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ אזי :

(בחר בתשובה הנכונה)

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו μ קבוע.

ד. μ ו \bar{X} יהיו קבועים.

17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.
 א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
 ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19. מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכוניות אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20. הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

פתרונות:**שאלה 2**

א.

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

$$\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973 \quad \text{ב.}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369 \quad \text{ג.}$$

$$\sigma(\bar{X}) = 0.486$$

שאלה 3

$$\mu_{\bar{x}} = 3.5$$

$$\sigma(\bar{X}) = 1.21$$

שאלה 4

$$\text{א. } 0.8413$$

$$\text{ב. } 0.0013$$

$$\text{ג. } 0$$

$$\text{ד. } 0.1974$$

שאלה 6

$$\text{א. } 0.0465$$

$$\text{ב. } 27.71$$

$$\text{ג. } 0.2628$$

שאלה 7

$$\text{א. } 0$$

$$\text{ב. } 0.1587$$

$$\text{ג. } 0.1587$$

$$\text{ד. } 0.5$$

שאלה 8

א. 0.5468

ב. 0.6826

שאלה 9

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

שאלה 10

0.0475

שאלה 11

0.1814

שאלה 12

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

שאלה 14

התשובה ב

שאלה 15

התשובה ד

שאלה 16

התשובה ג

שאלה 17

א. 2.429

ב. 0.25

פרק 33 - קונבולוציה

רקע:

X ו- Y יהיו שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם : $T = X + Y$, שגם הוא משתנה מקרי.

אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y , פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה :

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y) dy$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון : $X \sim \exp(1)$ כמו כן $Y \sim \exp(2)$. מצא את פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$.

תרגילים:

1. נתון ש $X, Y \sim \exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש X ו- Y בלתי תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.

2. נתון ש X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית הוכח ש $T = X + Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3. סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל 3 שעות. כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.
א. מצא את פונקציית הצפיפות של Z .
ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ- 4 שעות?

4. X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות:

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.

5. $X \sim U(2,3)$ ו- $Y \sim U(1,5)$ משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה:

א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?
ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6. X, Y, Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל-1. מצא את פונקציית הצפיפות של $X + Y + Z$.

7. הוכח את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף. (רמז: העזר בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

פתרונות :שאלה 1

$$f_T(t) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t \quad t \geq 0$$

שאלה 2

הוכחה

שאלה 3

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{1-z}) & 1 \leq z \leq 3 \\ \frac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}) & z > 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad .\text{א}$$

ב. 0.841

שאלה 4

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(t+3)^2 & -3 \leq t \leq -2 \\ \frac{1}{8}(2 - (t+1)^2) & -2 < t < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8}(2 - (t-1)^2) & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

שאלה 5

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{4} & 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4} & 4 < t < 7 \\ \frac{8-t}{4} & 7 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad .א$$

ב. 4.5

שאלה 6

$$f_w(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & 0 \leq w \leq 1 \\ -w^2 + 3w - 1.5 & 1 < w < 2 \\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

שאלה 7

הוכחה

פרק 34 - התפלגות לוג נורמלית

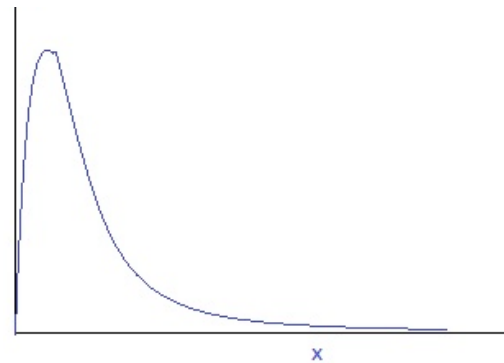
רקע:

נניח שלמשתנה Y ישנה התפלגות נורמלית, כלומר: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. נגדיר כעת את $X = e^Y$.
 X הינו משתנה המתפלג לוג נורמלית. הסיבה שקוראים להתפלגות באופן כזה היא ש $\ln(X) = Y$ מתפלג נורמלית.

תחום ההגדרה של Y הינו $(-\infty, \infty)$ לעומת זאת תחום ההגדרה של X הינו $(0, \infty)$.

נסמן את ההתפלגות של X באופן הבא: $X \sim \text{LOGN}(\mu, \sigma^2)$.
 בהתפלגות זו מתקיימים הקשרים הבאים:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$



דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$X \sim \text{LOGN}(10, 2^2)$$

מצא את האחוזון התשעים של ההתפלגות.

תרגילים:

1. נתון ש: $X \sim \text{LOGN}(0, 1^2)$.
- מהי ההתפלגות של $\ln(X) = Y$?
 - מהו החציון של X ?
 - חשב את $P(X > e)$.
2. נתון שהשכר במשק מסוים מתפלג לוג נורמלית התוחלת של השכר היא 10 יחידות כסף עם שונות 2 נתבונן בהתפלגות \ln השכר. כיצד מתפלגת \ln של השכר ומה התוחלת והשונות שלו?
3. הוכח שהחציון של $X \sim \text{LOGN}(\mu, \sigma^2)$ הינו e^μ .
4. נתון ש $X_i \sim \text{LOGN}(\mu, \sigma^2)$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$ כמו כן ידוע שהתצפיות הן בלתי תלויות זו בזו. הוכח $\prod_{i=1}^n X_i \sim \text{LOGN}(n\mu, n\sigma^2)$.
5. אורך חיים של מכשיר מתפלג לוג נורמלית עם תוחלת של 6 שנים וסטיית תקן של 1.5 שנים.
- מצא את העשירון העליון של אורך חיי המכשיר.
 - מה ההסתברות שהמכשיר יחיה יותר מ-3 שנים?
6. שפנים מתרבים פי X_i בכל חודש נתון ש- X_i מתפלג לוג נורמלית כאשר $E(X_i) = \sqrt{e}$ $V(X_i) = e(e-1)$. מה ההסתברות שבעבור שנה כמות השפנים גדלה פי 20?

פתרונות:**שאלה 1:**

א. התפלגות נורמלית סטנדרטית

ב. 1

ג. 0.1587

שאלה 2:

$$N\left(\mu = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{100}{1.02}\right), \sigma^2 = \ln(1.02)\right)$$

שאלה 3:

הוכחה

שאלה 4:

הוכחה

שאלה 5:

א. 7.98

ב. 0.9963

שאלה 6:

0.1949